

Их сунгаа 2019

1. Натурал a, b, c тоонууд өгөгджээ. Ямар нэг натурал k тооны хувьд $a^k + bc, b^k + ca, c^k + ab$ тоонууд нь 1-ээс их ерөнхий хуваагчтай байхыг батал.

2. ABC гурвалжны AD биссектрис дээр P цэгийг сонгон авчээ. BP шулуун гурвалжны AC талыг E цэгт, CP шулуун AB талыг F цэгт огтолно. AEF гурвалжныг багтаасан тойргийн A оройд татсан шүргэгч шулуун нь BC шулууныг Q цэгт огтолог бол $QA = QP$ гэдгийг батал.

3. Нэг тойрогт багтсан n ширхэг гурвалжин өгөгдсөн бөгөөд өгсөн гурвалжнуудын бүх орой нь ялгаатай байв. Улаан, хөх цэгүүд нь тойрог дээр сөөлжилж байхаар гурвалжин тус бүрийн нэг оройг улаан өнгөөр, нэг оройг хөх өнгөөр будаж болохыг харуул.

4. Натурал n тооноос бага n -тэй харилцан анхны бүх натурал тоог $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ гэж эрэмбэлэв. $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_{k-1} + a_k$ нийлбэрүүд нь бүгд 3-д хуваагддаггүй байх бүх n тоог ол.

5. $AB = BC$ хажуу талуудтай адил хажуут ABC гурвалжны BC, CA, AB талууд дээр харгалзан D, E, F цэгүүдийг $BDEF$ дөрвөн өнцөгт нь параллелограмм байхаар сонгон авчээ. ABC гурвалжныг багтаасаан тойргийн B оройг үл агуулах AC нумын дундаж цэг M бөгөөд DF, ME шулуунууд нь K цэгт огтлолцоно. EL нь DEF гурвалжны биссектрис бол A, K, L, C цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг батал.

6. Эерэг $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, c_1, c_2, \dots, c_n$ тоонууд өгөгджээ. $1 \leq \ell \leq n$ үед $\max\{i, j, k\} = \ell$ байх бүх боломжит i, j, k дугааруудын хувьд $a_i b_j c_k$ үржвэрүүдийн хамгийн ихийг m_ℓ гэж тэмдэглэе.

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)(c_1 + c_2 + \dots + c_n) \leq n^2(m_1 + m_2 + \dots + m_n)$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.