

Их сунгаа 2019

1. $1, 2, \dots, n$ тоонуудын бүх боломжит $a_1, a_2, \dots, a_n$ сэлгэмэлийн хувьд

$$\frac{1}{a_1(a_1 + a_2)(a_1 + a_2 + a_3) \dots (a_1 + a_2 + \dots + a_n)}$$

илэрхийллийн утгыг олжээ. Олсон бүх утгын нийлбэр нь $\frac{1}{n!}$ гэж батал.

2. Натурал a, b, c тоонууд өгөгджээ. Ямар нэг натурал k тооны хувьд $a^k + bc, b^k + ca, c^k + ab$ тоонууд нь 1-ээс их ерөнхий хуваагчтай байхыг батал.

3. Тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн диагоналиуд L цэгт огтлолцдог бөгөөд AD, BC шулуунууд M цэгт, AB, CD шулуунууд N цэгт огтлолцдог байв. ALD өнцгийн биссектрисс шулуун AD, BC талуудыг харгалзан P, Q цэгт, ALB өнцгийн биссектрисс шулуун AB, CD талуудыг харгалзан S, T цэгт огтолно. MPQ, NST, BSQ гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд нэг ерөнхий цэгтэй гэдгийг батал.

4. Натурал a, b тоо өгөгджээ. $c < 10 \cdot a$ бөгөөд cb үржвэрийн аравтын бичлэг нь a тоогоор эхэлдэг байх натурал тоо c олдохыг харуул.

5. Сургуульд параллель 3 анги байсан бөгөөд өөр ангийн зарим хүүхдүүд хоорондоо дайсагналцдаг байв (анги дотроо дайсан байхгүй). Хүүхэд бүрийн хувьд түүний нөгөө 2 ангид байгаа дайсны тоо хоорондоо ижил байжээ. Өөр өөр ангийн ерөнхий дайсантай хос хүүхдийн тоо нь дайсагналцдаг нийт хосын тооноос цөөнгүй гэж батал.

6. Эерэг $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, c_1, c_2, \dots, c_n$ тоонууд өгөгджээ. $1 \leq \ell \leq n$ үед $\max\{i, j, k\} = \ell$ байх бүх боломжит i, j, k дугааруудын хувьд $a_i b_j c_k$ үржвэрүүдийн хамгийн ихийг m_ℓ гэж тэмдэглэе.

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)(c_1 + c_2 + \dots + c_n) \leq n^2(m_1 + m_2 + \dots + m_n)$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.