

IMO-60

1. Бүхэл тоон олонлогийг $\mathbb{Z}$ гэж нэрлэе. Дурын бүхэл a, b тоонуудын хувьд

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b))$$

байх бүх $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ функцийг ол.

2. ABC гурвалжны BC тал дээр A_1 цэг, AC тал дээр B_1 цэг байрлана. AA_1 хэрчим дээрх P цэг ба BB_1 хэрчим дээрх Q цэгийн хувьд PQ нь AB шулуунтай параллел болог. PB_1 шулуун дээрх P_1 цэгийн хувьд B_1 цэг P, P_1 цэгүүдийн хооронд эдгээртэй давхцахгүйгээр байрлах бөгөөд $\angle PP_1C = \angle BAC$ байдаг гэе. Мөн ижлээр, QA_1 шулуун дээрх Q_1 цэгийн хувьд A_1 цэг Q, Q_1 цэгүүдийн хооронд эдгээртэй давхцахгүйгээр байрлах бөгөөд $\angle CQ_1Q = \angle CBA$ байдаг гэе. P, Q, P_1, Q_1 цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг батал.

3. Нийт 2019 хэрэглэгчтэй нэгэн сошиал сүлжээний зарим хэрэглэгчид нь найзууд байв. Сүлжээнд A хэрэглэгч B хэрэглэгчтэй найз бол B хэрэглэгч A хэрэглэгчтэй найз байдаг. Дараах үйл явдал давтагдан, хоёр үйл явдал нэгэн зэрэг биш, явагдах боломжтой:

A нь B, C -тэй хоёулантай нь найз, харин B, C хоорондоо найз биш байдаг A, B, C гурван хэрэглэгч найзлалтын төлөвөө B, C хоорондоо найз, харин A нь B -тэй ч найз биш, C -тэй ч найз биш байхаар өөрчилнө. Бусад найзлалтын төлөвт өөрчлөлт орохгүй.

Анх 1010 хэрэглэгч нь тус бүр 1009 найзтай ба 1009 хэрэглэгч нь тус бүр 1010 найзтай бав. Бүх хэрэглэгч нэгээс олонгүй найзтай үлдэх үйл явдлын дараалал олдохыг батал.

4. Дараах нөхцөлийг хангах бүх (k, n) эерэг бүхэл тоон хосыг ол.

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \dots (2^n - 2^{n-1})$$

5. Батт Банкнаас гаргадаг зоос нэг талдаа H , нөгөө талдаа T үсэгтэй. Номин зүүнээс баруун тийш жагсаасан n ширхэг зоостой. Тэр дараах үйлдлийг давтан хийдэг: хэрэв яг $k > 0$ ширхэг зоосны H тал нь дээшээ харсан бол зүүн талаасаа тоолоод k дахь зоосыг эргүүлнэ; үгүй бол бүх зоосны T тал нь дээшээ харсан бөгөөд Номин үйлдэл хийхээ зогсоно. Жишээлбэл, $n = 3$ үед анх THT байрлалаас эхлэхэд $THT \rightarrow HNT \rightarrow HTT \rightarrow TTT$ гээд гурван үйлдлийн дараа зогсоно.

1. Ямар ч байрлалаас эхэлсэн, Номин төгсгөлөг алхамын дараа зогсохыг батал.
2. Анх C байрлалаас эхлэхэд зогсох хүртэлх үйлдлийн тоог $L(C)$ гэе. Жишээлбэл $L(THT) = 3$ ба $L(TTT) = 0$ байна. C нь бүх боломжит 2^n байрлалаар гүйх үеийн $L(C)$ тоонуудын арифметик дунджийг ол.

6. $AB \neq AC$ байдаг хурц өнцөгт ABC гурвалжинд багтсан I төвтэй ω тойрог BC, CA, AB талуудыг, харгалзан, D, E, F цэгүүдэд шүргэнэ. D цэгийг дайрсан EF шулуунд перпендикуляр шулуун ω тойргийг дахин R цэгт огтолно. AR шулуун ω тойргийг дахин P цэгт огтолно. PCE, PBF гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд дахин Q цэгт огтлолцоно. DI ба PQ шулуунууд A цэгийг дайрсан AI шулуунтай перпендикуляр шулуун дээр огтлолцохыг батал.