

IMO-47

1. ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв I байг. Уг гурвалжин дотор P цэгийг

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$

байхаар авав. $AP \geq AI$ болохыг баталж, тэнцэл болох зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь P цэг I -тэй давхцах явдал гэж батал.

2. Зөв 2006 өнцөгт P -ийн диагоналын төгсгөлийн цэгүүд нь P -ийн хилийг тус бүр сондгой тооны тал агуулах хоёр хэсэгт хувааж байвал түүнийг *сайн* гээ. P -ийн талуудыг мөн *сайн* гээ. Аль ч хоёр нь P -ийн дотор ерөнхий цэггүй байх 2003 диагоналаараа P гурвалжнуудад хуваагдсан байг. Тийм хуваалтад хоёр сайн талтай адил хажуут гурвалжин хамгийн олондоо хэд байж болох вэ?

3. Аливаа a, b, c бодит тоонуудын хувьд

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

тэнцэтгэл биш биелэх байх хамгийн бага бодит тоо M -г ол.

4.

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$$

байх бүхэл тооны бүх хос (x, y) -г ол.

5. $P(x)$ бүхэл коэффициенттэй $n > 1$ зэргийн олон гишүүнт ба k нь натурал тоо байг.

$$Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots))$$

олон гишүүнт авъя (энд P яг k удаа орсон). $Q(t) = t$ байх t бүхэл тоо n -ээс илүүгүй оршин байхыг батал.

6. Гүдгэр олон өнцөгт P -ийн b тал бүрд, нэг тал нь b -тэй давхцах P -д агуулагдах гурвалжнуудын талбайн хамгийн ихийг харгалзуулъя. P -ийн бүх талуудад харгалзах талбайнуудын нийлбэр, P -ийн талбайг хоёр дахин авснаас багагүй гэж батал.