MMO-12

1. $3\sqrt{x^3+a^3} = 2x^2+(1-2a)x+a(1+2a)$ тэгшитгэл ядаж нэг бодит x шийдтэй байх a параметрийн хамгийн их ба хамгийн бага утгыг ол.

2. Хавтгайд $ABCD$ квадрат ба түүн дотор өгөгдсөн квадратын талуудтай параллел талуудтай $A_1B_1C_1D_1$ квадрат өгөгдөв.

а) $A_1B_1C_1D_1$ суурьтай дурын жишүү өнцөгт параллелепипедийн дээд суурь нь $A'B'C'D'$ бол AA', BB', CC', DD' шулуунууд нэг S цэгт огтлолцоно гэдгийг батал.

б) $A_1B_1C_1D_1A'B'C'D'$ параллелепипедийн суурь $A_1B_1C_1D_1$ бэхлэгдээд хажуу ирмэг $|AA_1|$-ийн урт тогтмол байх үед S цэгүүд огторгуйд ямар геометр байр үүсгэх вэ?

3. Дурын арифметик прогрессийн a_{n-k}, a_n, a_{n+k} гурван гишүүний хувьд

$$a_{n-k}^{2^s} + a_{n+k}^{2^s} \geq 2a_n^{2^s}$$

байхыг үзүүл, энд s натурал тоо. Тэнцэл хэдийд биелэх вэ?

4. Хэрэв $f(x)$ функц дурын x ба тогтмол m-ийн хувьд $f(x+m) = \dfrac{f(x)+1}{1-f(x)}$ функцэн тэгшитгэлд тохирдог бол түүнийг үетэй гэж батал.

5. Урт нь үл мэдэгдэх AB хэрчмийн дундаж дээр төвтэй, $|AB|$-ээс бага диаметртэй хагас тойргийг байгуулан түүнд A, B цэгүүдээс r урттай шүргэгчдийг татаж; нэгийг нь цааш n, нөгөөг нь m урттайгаар үргэлжлүүлэн үзүүрүүдийг нь холбоход гарах хэрчим тойргийг шүргэж байсан бол хагас тойргийн радиусыг ол.

6. Залган бичиж тоо үүсгэхэд орсон цифр бүр нь тэгш тоотой давтагдах хэдэн тоог өгөгдсөн 11 натурал тоон дотроос сонгон авч болохыг үзүүл.

7. $(x+1)y$, xy, $(x-1)y$ нь гурвалжны өнцгүүд бол $\sin^2(x+1)y = \sin^2 xy + \sin^2(x-1)y$ тэгшитгэлийг хангах (x,y) хосуудыг ол.

8. Огторгуйд аль ч дөрөв нь нэг хавтгайд үл орших n цэг өгчээ.

а) Эдгээр цэгүүд дээр оройтой бөгөөд дотроо эдгээр цэгүүдийн нэгийг нь ч агуулаагүй тетраэдрын тоо $\dfrac{1}{4}C_n^3 \leq x \leq C_n^4$ тэнцэтгэл бишийг хангахыг үзүүл.

б) Эдгээр цэгүүдийн аль ч хоёрынх нь хоорондох зай тэнцүү бол n хэд байх вэ?