ММО-52

1. Элдэв талт ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн A оройг агуулсан BC нумын дундаж цэг F байв. A, F цэгүүдийг дайрсан тойрог $[BA)$, $[CA)$ цацрагуудыг харгалзан M, N цэгүүдэд огтлох бөгөөд MC, NB шулуунууд P цэгт огтлолцоно. S цэг нь $ABSC$ дөрвөн өнцөгт нь параллелограмм байх цэг бол $\measuredangle BSP = \measuredangle CSP$ гэж батал.

2. Тойргоор тоглосон тэмцээнд 52 сурагч оролцжээ. Хэдэн тоглолтын дараа аль ч сурагчийг сонгон авахад түүнтэй тоглосон сурагчдын тоглолтын тоо ялгаатай байсан бол хамгийн олондоо хэдэн тоглолт явагдсан байсан бэ?

3. $a + b = (a, b)^2$, $b + c = (b, c)^2$, $c + a = (c, a)^2$ байх бүх натурал a, b, c тоонуудыг ол. Энд (a, b)-ээр a, b тоонуудын хамгийн их ерөнхий хуваагчийг тэмдэглэв.

4. ABC гурвалжин доторх P цэгээс AB, BC талууд руу буулгасан перпендикулярын суурийг харгалзан S, T гэе. $\triangle STA$ гурвалжныг багтаасан тойргийн AC-г огтолсон хоёр дахь цэгийг X, $\triangle STC$ гурвалжныг багтаасан тойргийн AC-г огтолсон хоёр дахь цэгийг Y ба (SY), (TX) шулуунуудын огтлолцлыг R гэвэл $PR \perp AC$ гэж батал.

5. Эерэг a, b, c тоонуудын хувьд $a + b + c = 3$ бол

$$\frac{a+b}{2ab+1} + \frac{b+c}{2bc+1} + \frac{c+a}{2ca+1} \geq 2$$

гэж батал.

6. p нь сондгой анхны тоо. $n^{n^n} + n^n + 1$ тоо нь p-д хуваагддаг байх натурал n тоо олдохыг батал.