ММО-45

1. Зөв 2011 өнцөгтийн оройнуудыг аль нэг оройгоос нь эхлэн цагийн зүүний дагуу $1, 2, \ldots, 2011$ тоонуудаар дугаарлав. Хэрэв цагийн зүүний дагуу a, b, c гэж уншигдах (дараалсан байх албагүй) 3 тоог харгалзан c, $a - \frac{1}{2009}$, $b + \frac{1}{2009}$ тоонуудаар сольж болох бол энэ үйлдлийн тусламжтайгаар уг олон өнцөгтийн оройнуудыг цагийн зүүний эсрэг чиглэлд $1, 2, \ldots, 2011$ тоонуудаар дугаарлаж болох уу?

2. n нь 6-тай харилцан анхны натурал тоо ба a_1, $a_2 \ldots, a_n$; b_1, $b_2, \ldots, b_n$ нь $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$; $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$ байх натурал тоонууд байг. Хэрэв дурын t натурал тооны хувьд $a_i + a_j + a_k = t$, $(i < j < k)$ байх гурвалын тоо нь $b_i + b_j + b_k = t$, $(i < j < k)$ байх гурвалын тоотой тэнцүү бол $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$ гэж батал.

3. ω тойрог өгөгдөв. Уг тойргийг дотоод байдлаар шүргэсэн бөгөөд аль ч зэргэлдээ 2 тойргууд нь хоорондоо шүргэлцсэн 6 тойрог өгөгдөв. Эдгээр 6 тойргийн ω-тэй шүргэлцсэн цэгүүдийг A, B, C, D, E ,F гэе. Тэгвэл $ABCDEF$ 6 өнцөгтийн AD, BE, CF гол диагоналууд 1 цэгт огтлолцохыг батал.

4. $x + y + z = 1$ байх x, y, z эерэг бодит тоонуудын хувьд

$$\frac{\sqrt{xyz}}{x^2 + y^2 + z^2 - x^3 - y^3 - z^3} \leq \sqrt{\frac{xy}{(1-z)^2} + \frac{yz}{(1-x)^2} + \frac{zx}{(1-y)^2}}$$

тэнцэтгэл бишийг батал.

5. ABC гурвалжны AA_1, BB_1, CC_1 биссектриссүүд татав. $AA_1 \cap B_1C_1 = X$ ба X-ээс BC-д буулгасан перпендикулярын суурийг Y гэе. $\measuredangle BC_1Y$ ба $\measuredangle CB_1Y$-үүдийн биссектриссүүдийн огтлолцлын цэгийг Z гэе. Тэгвэл A, Y, Z цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

6. Дурын $k \in \mathbb{N}$ тооны хувьд $\dfrac{2^{n^2} + 1}{n^3}$ нь бүхэл байдаг яг k ширхэг анхны тоон хуваагчтай n-тоо олдохыг батал.