

Их сунгаа 2019

1. Натурал a, b, c тооныуд өгөгджээ. Ямар нэг натурал k тооны хувьд $a^k + bc, b^k + ca, c^k + ab$ тооныуд нь 1-ээс их өрөнхий хуваагчтай байхыг батал.
2. ABC гурвалжны AD биссектрисс дээр P цэгийг сонгон авчээ. BP шулуун гурвалжны AC талыг E цэгт, CP шулуун AB талыг F цэгт огтолно. AEF гурвалжныг багтаасан тойргийн A оройд татсан шургэгч шулуун нь BC шулууныг Q цэгт огтолдог бол $QA = QP$ гэдгийг батал.
3. Нэг тойрогт багтсан n ширхэг гурвалжин өгөгдсөн бөгөөд өгсөн гурвалжнуудын бүх орой нь ялгаатай байв. Улаан, хөх цэгүүд нь тойрог дээр сөөлжилж байхаар гурвалжин тус бүрийн нэг оройг улаан өнгөөр, нэг оройг хөх өнгөөр будаж болохыг харуул.
4. Натурал n тооноос бага n -тэй харилцан анхны бүх натурал тоог $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ гэж эрэмбэлэв. $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_{k-1} + a_k$ нийлбэрүүд нь бүгд 3-д хуваагддаггүй байх бүх n тоог ол.
5. $AB = BC$ хажуу талуудтай адил хажуут ABC гурвалжны BC, CA, AB талууд дээр харгалзан D, E, F цэгүүдийг $BDEF$ дөрвөн өнцөгт нь параллелограмм байхаар сонгон авчээ. ABC гурвалжныг багтаасаан тойргийн B оройг үл агуулах AC нумын дундаж цэг M бөгөөд DF, ME шулуунууд нь K цэгт огтлонлоно. EL нь DEF гурвалжны биссектрисс бол A, K, L, C цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг батал.
6. Эерэг $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, c_1, c_2, \dots, c_n$ тооныуд өгөгджээ. $1 \leq \ell \leq n$ үед $\max\{i, j, k\} = \ell$ байх бүх боломжит i, j, k дугааруудын хувьд $a_i b_j c_k$ үржвэрүүдийн хамгийн ихийг m_ℓ гэж тэмдэглэе.

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)(c_1 + c_2 + \dots + c_n) \leq n^2(m_1 + m_2 + \dots + m_n)$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.