IMO-49

1. Хурц өнцөгт ABC гурвалжны өндрүүдийн огтлолцлын цэг нь H. BC талын дундач цэг дээр төвтэй H цэгийг дайрсан тойрог BC шулууныг A_1 ба A_2 цэгүүдэд огтолно. Мөн адилаар CA талын дундач цэг дээр төвтэй H цэгийг дайрсан тойрог CA шулууныг B_1 ба B_2 цэгүүдэд огтолно, AB талын дундач цэг дээр төвтэй H цэгийг дайрсан тойрог AB шулууныг C_1 ба C_2 цэгүүдэд огтолно. A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг батал.

2. (a) $xyz = 1$ байх аливаа $x, y, z \neq 1$ тоонуудын хувьд

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

(b) Дээрх тэнцэтгэл биш тэнцэлдээ хүрдэг байх рационал тоонуудын x, y, z гуравт төгсгөлгүй олон олдоно гэдгийг харуул.

3. $n^2 + 1$ тоо $2n + \sqrt{2n}$-ээс их анхны тоон хуваагчтай байх n төгсгөлгүй олон олдоно гэж батал.

4. $pq = rs$ байх аливаа $p, q, r, s > 0$ тоонуудын хувьд

$$\frac{f(p)^2 + f(q)^2}{f(r^2) + f(s^2)} = \frac{p^2 + q^2}{r^2 + s^2}$$

байх бүх $f\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$ функцийг ол.

5. n, k нь тэгш сондгойгоороо ижил натурал тоонууд ба $k \geq n$ байг. Бидэнд $1, 2, \ldots, 2n$ гэж дугаарлагдсан $2n$ ширхэг чийдэн өгөгдсөн ба эхэндээ бүх чийдэн унтраалттай байжээ. Бид k алхамтай дараалал сонирхоё. Алхам тутамд чийдэнгүүдийн аль нэгийн төлвийг өөрчилнө (унтраалттай чийдэнг асааж, асаалттай чийдэнг унтраана).

N нь $1, \ldots, n$ чийдэнгүүд асаалттай, $n+1, \ldots, 2n$ чийдэнгүүд унраалттай байх төлөвт шилжих k алхамын тоо гэе.

M нь $n+1, \ldots, 2n$ чийдэнгүүдийн төлвийг огт өөрчилөхгүйгээр өмнөхтэй ижил төлөвт шилжих k алхамын тоо гэе.

Тэгвэл N/M харьцааг ол.

6. $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн $AB \neq BC$. ABC, ADC гурвалжинд багтсан тойргууд харгалзан ω_1, ω_2. ABC өнцөгт багтсан AD, CD талуудын үргэлжлэлүүдийг шүргэдэг ω тойрог оршин байдаг гэе. ω_1, ω_2 тойргуудын гадаад ерөнхий шүргэгч ω тойрог дээр огтлолцоно гэж батал.