

IMO-50

1. Натурал тоо n ба $\{1, 2, \dots, n\}$ олонлогийн $a_1, a_2, \dots, a_k$ ($k \geq 2$) ялгаатай тоонууд өгсөн ба $i = 1, \dots, k-1$ бүрийн хувьд $a_i(a_{i+1} - 1)$ нь n -д хуваагдаж байв. $a_k(a_1 - 1)$ нь n -д хуваагдахгүй гэж батал.

2. ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн төв O байг. P ба Q цэгүүд харгалзан CA ба AB талуудын дотоод цэгүүд. k тойрог BP, CQ, PQ хэрчмүүдийн дундаж цэгийг дайрдаг. Хэрвээ PQ шулуун k тойргийг шүргэдэг бол $OP = OQ$ байна гэж батал.

3. Натурал тоонуудын эрс өсөх дараалал $s_1, s_2, s_3, \dots$ өгөгдсөн ба

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \text{ ба } s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

дэд дарааллууд нь арифметик прогресс үүсгэдэг байг. $s_1, s_2, s_3, \dots$ дараалал мөн арифметик прогресс гэж батал.

4. ABC гурвалжны $AB = AC$ байг. A ба B өнцгийн биссектрисүүд BC ба AC талуудтай харгалзан D ба E цэгт огтлолцоно. ADC гурвалжинд багтсан тойргийн төв K гээ. $\angle BEK = 45^\circ$ гэж үзье. $\angle BAC$ -ийн боломжит бүх утгыг ол.

5. Натурал тоон олонлогийг натурал тоонуудын олонлогт буулгасан аливаа x, y натурал тоонуудын хувьд

$$x, \quad f(y), \quad f(y + f(x) - 1)$$

тоонууд үл бөхөх гурвалжны талууд болдог бүх f функцийг ол.

6. n сөрөг биш бүхэл тоо байг. Дэвхрэг бодит тоон шулуун дээр үсэрдэг. Тэрээр 0 цэг дээрээс эхлэн баруун тийш өөрийн дураар $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ урттай нийт $n+1$ удаа үсэрнэ. M нь $a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1}$ -ээс бага n ширхэг натурал тооноос тогтох тоон олонлог байв. Тэгвэл дэвхрэг M олонлогийн нэг ч цэг дээр буухгүй байхаар үсрэлтүүдээ хуваарилж чадна гэж батал.