

**Тусгаар тогтнолын олимпиад**

**1.**  $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{Z}[x]$  олон гишүүнтэй хувьд:

- (a) Уг олон гишүүнт  $n$  ширхэг бүхэл язгууртай
- (b)  $|a_{n-1}| < a_n = 2022$
- (c)  $a_{n-1}$  нь бүтэн куб

Тэгвэл  $a_{n-1}$  ямар утгууд авах боломжтой вэ?

**2.** 2022 элементтэй олонлогийн 3 элементтэй олонлогуудын заримаас нь тогтох  $\mathcal{F}$  бүл байв. Энэ булийн аль ч турвынх нь ядаж хоёр нь хоосон биш огтлолцолтой бол  $|\mathcal{F}| \leq 2020 \cdot 2021$  гэж батал.

**3.**  $\triangle ABC$ -ийн  $BC$  тал дээр  $E, F$  цэгүүдийг  $B, E, F, C$  дарааллаар авав.  $\angle ABC, \angle ACB, \angle AEB, \angle AFC, \angle AEF, \angle AFE$ -ийн биссектрисүүдийг харгалзан  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6$  гэж тэмдэглэе.  $\ell_3 \cap \ell_6 = D, \ell_4 \cap \ell_5 = G, \ell_1 \cap GD = N, \ell_2 \cap GD = M, \ell_1 \cap \ell_4 = L, \ell_1 \cap \ell_5 = Q, \ell_2 \cap \ell_3 = K, \ell_2 \cap \ell_6 = P, AK \cap FD = R, CM \cap BN = I, AL \cap EG = T$  болог.  $NT, MR, AI$  шулуунууд нэг цэгт огтлолцено гэж батал.

**4.**  $(n, 30) = 1, n \in \mathbb{N}$  байг.  $a \in \mathbb{Z}$  тооны хувьд  $n \mid x^2 - a$  байх  $x$  бүхэл тоо олддог бол  $a$ -г квадрат суутгал гэе. Тэгвэл  $1, 2, \dots, n - 1$  тоонуудаас дэс дараалсан хоёр квадрат суутгал олдохыг батал.